<u>Υποδείξεις Τεστ 2, Απειροστικος Λογισμός 2</u>

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

(i) Για τυχαίο $\varepsilon > 0$ αρκεί να επιλέξουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ και η συνάρτηση αποδεικνύεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) Η συνάρτηση δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής για $\varepsilon = \dfrac{\ln 2}{2}$ (με άτοπο) δεν ισχύει ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας.

Θέμα 2

(i) Λάθος, πχ $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (0,1) \\ 2 & , \quad [1, +\infty) \end{cases}$

(ii) Λάθος, πχ $f(x) = x$.

(iii) Σωστό, αφού $x_n, y_n \to +\infty$, τότε για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ισχύει $x_n, y_n > 1$, για κάθε $n \geq n_0$ και αφού f ομοιόμορφα συνεχής στο $(1, +\infty)$ από την Αρχή της Μεταφοράς για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις έχουμε το ζητούμενο.

(iv) Σωστό, αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$ υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του $(0, 1)$ με $x_n \to 1$, η $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Ιδιαίτερα, ισχύει ο δεδομένος ισχυρισμός.

Θέμα 3

(i) Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, γιατί το όρια $\left(0, \dfrac{\pi}{5}\right)$ δεν είναι πεπερασμένα.

(ii) Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, γιατί είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και Lipchitz (άρα ομοιόμορφα συνεχής) στο $[1, +\infty)$ αφού έχει φραγμένη παράγωγο σε αυτό.

(iii) Η h δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, πχ αν $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n + \frac{1}{2}}\right)^2$ και $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^2$, τότε $|x_n - y_n| \to 0$, αλλά $|h(x_n) - h(y_n)| = 1 \to 1 \neq 0$.

(iv) Η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων (γράψτε αναλυτικά τις λεπτομέρειες).

Θέμα 4

Η υπόθεση δεν μπορεί να παραληφθεί, πχ η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ αλλά η $\dfrac{1}{f}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση σε αυτό. Επίσης, υπό την υπόθεση $(\star)$ αν η f είναι Lipchitz στο A τότε και η $\dfrac{1}{f}$ είναι Lipchitz στο A (με τον ορισμό).

Only Maths -Official-